PRÁCTICAS MATEMÁTICAS I

CURSO 2012-2013

TEMA 1. INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

TEMA 2. APROXIMACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

TEMA 3. AMPLIACIÓN DE CÁLCULO MULTIVARIANTE

TEMA 4. CÁLCULO INTEGRAL

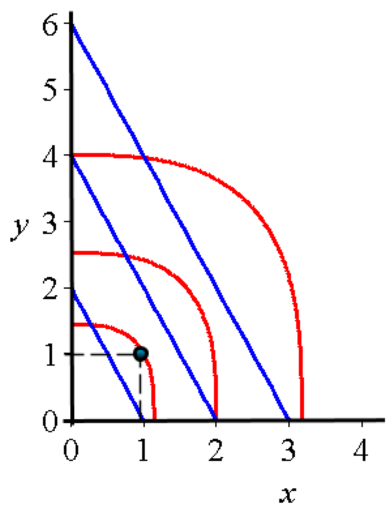
TEMA 5. AMPLIACIÓN DE CÁLCULO INTEGRAL

TEMA 1

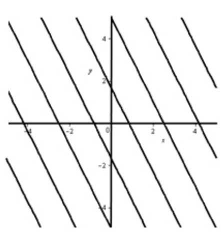
INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

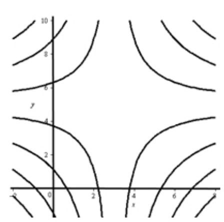
1. Halle el dominio natural de definición de las siguientes funciones:
   a) La función de producción $f(x_1, x_2) = 3(x_1 + x_2)^{1/2}$ donde x_1 y x_2 son las cantidades empleadas de ciertos inputs.
   b) La función de producción $f(K, L) = L + \ln K$ donde K es el capital y L es el trabajo.
   c) La función de demanda $x = f(p, m) = \frac{m^2-4}{2p}$ donde m es la renta y p es el precio de dicho bien.

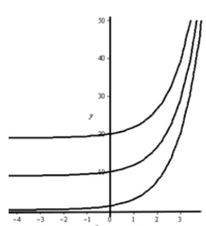
2. En el gráfico que aparece debajo aparece la intersección, con el primer cuadrante, de 6 curvas de nivel. Tres de ellas corresponden a la función $f(x, y) = 2x + y$ y las otras tres a $g(x, y) = 2x^3 + y^3$. Indique cuáles corresponden a f y cuáles a g y el valor de la correspondiente función en cada una de esas 6 curvas de nivel.

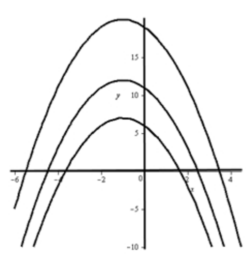


3. Los siguientes cuatro gráficos son las curvas de nivel de cuatro de las ocho funciones que aparecen a la derecha. Dí a cuál corresponde cada uno de ellos indicando con flechas hacia dónde crece la función.





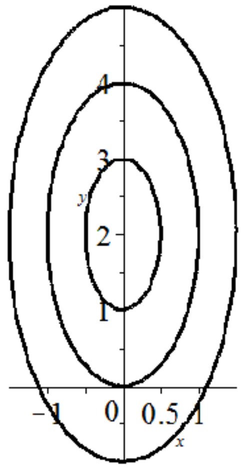


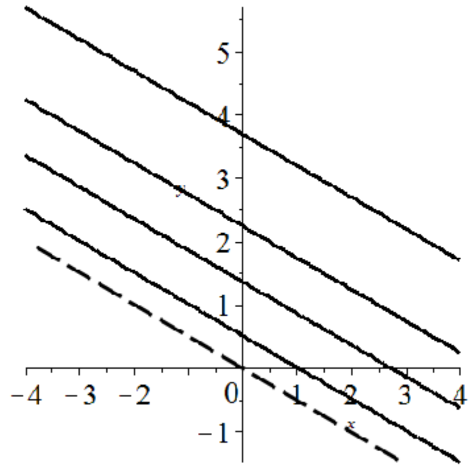


1) $f(x,y) = x(y-6)$
2) $f(x,y) = (x-3)(y-5)$
3) $f(x,y) = y+2x$
4) $f(x,y) = y-2x$
5) $f(x,y) = -y+e^{-x}$
6) $f(x,y) = y-e^{x}$
7) $f(x,y) = -y-(x+1)^2$
8) $f(x,y) = (x+1)+y^2$

4. Los siguientes gráficos corresponden a las curvas de nivel de dos de las cuatro funciones que aparecen a continuación. Dí a cuál corresponde cada una e indica con una flecha hacia dónde crece la función.

$$f_1(x, y) = -4x^2 - (y-2)^2 \qquad f_2(x, y) = 4x^2 - (y-2)^2$$
$$f_3(x, y) = -x + y \qquad f_4(x, y) = \ln(x + 2y)$$





5. Represente gráficamente 3 curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones.

   (i) $f(x,y) = 3x + \ln(y+1)$; (ii) $f(x,y) = x^4 y$; (iii) $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$; (iv) $f(x,y) = \sqrt{2x+y}$.

6. Dibuje el recinto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \sqrt{x} + 1,\ x + y \geq 2,\ y \geq x - 1\}$

7. Cuando se producen x e y unidades de los bienes X e Y se incurre en unos costes dados por la función $C(x,y) = x + 2y^2$. Los bienes X e Y se venden, respectivamente, a precios $p_x = 1$ y $p_y = 2$ por unidad.
   a) Encuentre y represente gráficamente la curva de isocoste que contiene al punto $(6,1)$.
   b) Encuentre otro par de cantidades (x,y) que esté en la misma curva de isocoste que $(6,1)$
   c) Encuentre y represente gráficamente el conjunto de combinaciones de productos (x,y) que permitan ingresar al menos 8 unidades monetarias con coste menor o igual que 8
   d) Encuentre y represente gráficamente el conjunto de combinaciones de productos (x,y) que permitan ingresar al menos 8 unidades monetarias sin pérdidas.

8. El nivel de bienestar de un consumidor que consume x unidades del bien X e y unidades del bien Y viene dado por la función (función de utilidad)

$$U(x,y) = x^{1/2} y^{1/4}$$

   Suponga que el consumidor dispone de una renta de $M = 24$ unidades y los precios de los bienes X e Y son respectivamente $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Represente gráficamente los siguientes conjuntos:
   a) El conjunto de cestas (x,y) accesibles para el consumidor.
   b) El conjunto de cestas preferidas o indiferentes a la cesta $(1,1)$.
   c) El conjunto de cestas accesibles y preferidas o indiferentes a la cesta $(1,1)$.
   d) ¿Es la cesta $(9,1)$ una cesta accesible que maximiza la utilidad del consumidor?
   NOTA: Una cesta (x_1,y_1) es preferida a la cesta (x_2,y_2) si y solo si $U(x_1,y_1) > U(x_2,y_2)$. Son indiferentes si y solo si $U(x_1,y_1) = U(x_2,y_2)$.

9. Considere un individuo que dispone de 80 euros que puede gastar en los bienes X y Y. Represente gráficamente el conjunto de cestas (x,y) que podría comprar el individuo en los siguientes casos.
   a) Los precios de X e Y son $p_x = 8$ y $p_y = 4$.
   b) Los precios de X e Y son $p_x = 8$ y $p_y = 4$ pero, si comprase más de 4 unidades de bien X, todas las unidades compradas de bien X por encima de 4 tendrían un descuento del 50%.
   c) Los precios de X e Y son $p_x = 8$ y $p_y = 4$ pero, si comprase más de 4 unidades de bien X, todas las unidades compradas de bien X tienen un descuento del 50%.
   d) Si compra en el lugar A los precios son $p_x = 8$ y $p_y = 4$ pero si compra en el lugar B los precios serían $p_x = 4$ y $p_y = 8$.
   Indicación**:** Para los apartados (b) y (c) considere los casos $x \leq 4$ y $x > 4$.

10. Sean las funciones de producción
$$f_1(L) = L^2/4; \qquad f_2(L) = 4L^{1/2},$$
donde L es el factor trabajo. La productividad marginal del trabajo es la devivada de la función de producción respecto de L.
a) Calcule la productividad marginal del trabajo para las funciones de producción anteriores. ¿Son las funciones de producción crecientes? ¿Son crecientes las productividades marginales?
b) Si la cantidad producida con una unidad adicional de factor es mayor cuando L es grande que cuando es pequeño, ¿a qué función de producción nos referimos?
c) Suponga que $L = 4$. Para cada una de las funciones anteriores, si disminuye la cantidad empleada del factor en un 4%:
i) ¿En qué porcentaje aproximado varía la cantidad producida?
ii) ¿En qué cuantía aproximada varían las productividades marginales?

11. Calcule las derivadas parciales de las funciones que aparecen a continuación
a) $f(x,y) = 4xy^{1/2} - \frac{y}{x^2+y}$ b) $f(m,n) = me^{2m-n}$ c) $f(a,b) = \frac{a}{a+b} + sen(2a)$
d) $f(u,v) = \sqrt{u(v^2+1)}$ e) $f(p,q) = \ln(\frac{p^2}{p+q})$ f) $f(x,y,z) = xe^z(\frac{y+x}{z^2+1})$

12. Calcule el gradiente en el punto indicado para las siguientes funciones e interprete el signo de cada una de las derivadas parciales
a) La función de beneficios $B(K,L) = 12K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{2}} - 4K - 2L$ donde K es el capital y L es el trabajo en el punto $(K,L) = (8,16)$.
b) La función de demanda $f(p,q) = \frac{q+5}{p+1}$ donde p es el precio del bien y q es el precio de otro bien en el punto $(p,q) = (3,1)$.

13. Cuando se producen x unidades del bien X e y unidades del bien Y se incurre en unos costes dados por la función
$$C(x,y) = 8\sqrt{x^2+3y}.$$
Actualmente $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.
a) ¿Cuál es aproximadamente el coste si x se incrementa en una décima?
b) ¿Cuál es aproximadamente la variación en el coste si x se incrementa un 10%?
c) ¿Cuál es aproximadamente la variación porcentual en el coste si y se incrementa un 8%?

14. La cantidad producida de bien Y es
$$y = f(p,w) = \frac{4p^2 - 8w}{w}$$
donde p es el precio del bien y w es el precio del factor empleado.
a) Halle el dominio natural de definición de $f(p,w)$ y represéntelo gráficamente.
b) Halle la elasticidad de Y respecto de p cuando $p_0 = 4$ y $w_0 = 2$.
c) ¿Es cierto que el porcentaje en el cual aumenta la cantidad producida de Y al aumentar p es mayor que el porcentaje en el que aumenta el precio p?
d) Si p aumenta en un 3%, ¿cuál es la variación porcentual aproximadada en y?

15. La demanda de cierto bien es $x(p,q)$ donde p es el precio de x y q es el precio de otro bien. Utilice el signo de las derivadas parciales primeras y/o segundas para reflejar:
(i) La demanda de x disminuye al aumentar p, y la disminución es, en valor absoluto, mayor cuanto mayor es el precio p.
(ii) La demanda de x aumenta al aumentar q y este aumento es mayor cuanto menor es p.

16. Sea $B(L,K)$ la función de beneficios de una empresa donde L es el trabajo y K es el capital.
Se sabe que $B(8,9) = 10$, $\nabla B(8,9) = (1,-2)$ y que $HB(8,9) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
Diga, justificando su respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.
(i) Si K aumenta un 1% el beneficio disminuye aproximadamente en 0.02 unidades
(ii) Si K disminuye ligeramente el beneficio aumenta
(iii) Si K aumenta en una décima el beneficio disminuye aproximadamente un 2%
(iv) El beneficio extra por una unidad adicional de trabajo es mayor cuanto mayor es el trabajo
(iv) Si K se incrementa un 5% el beneficio disminuye un 9%

17. Sea $x(p,q) = \frac{20-p+q}{p}$ la función que proporciona la demanda x de cierto bien conocido su precio p, y el precio q de otro bien.
a) Halla su dominio natural y dibuja los puntos (p,q) del dominio natural para los que la demanda es mayor o igual a 3 unidades. ¿Es este conjunto compacto?
b) Calcula el gradiente y la hessiana de la función $x(p,q)$ en cualquier punto (p,q) e interpreta el signo de cada una de estas derivadas parciales primeras y segundas.
c) Dí si la demanda es elástica o inelástica respecto de p en el punto $(p_0, q_0) = (2,4)$. ¿Cuál es aproximadamente la variación porcentual en la demanda si p aumenta un 2% ?

18. Los beneficios de una empresa dependen del precio por unidad de capital r y del precio por unidad de trabajo w según la función
$$\Pi(r,w) = 100\frac{r+w}{rw}$$
a) Calcula el gradiente y la hessiana de la función anterior en un punto arbitrario (r_0, w_0) e interpreta los signos de esas derivadas parciales. Dí si es cierto que la variación en el beneficio al incrementarse r es, en valor absoluto, mayor cuanto mayor es r.
b) Supón que $(r_0, w_0) = (5,2)$. Dí cuál es aproximadamente la variación porcentual en el beneficio si r se incrementa un 1%.
c) Demuestra que los puntos que cumplen $w = 1 + \frac{1}{r-1}$ están en una curva de nivel de $\Pi(r,w)$. Dibuja esta curva de nivel diciendo cuál es el valor de Π en esos puntos.

19. La demanda x de mantequilla (en toneladas) es función del precio p del kilo de mantequilla y del precio q del kilo de margarina (ambos precios vienen dados en euros). Actualmente los precios son p_0 y q_0 y la demanda es x_0. Expresa utilizando derivadas parciales primeras y/o segundas o elasticidades los siguiente hechos:
i) La demanda de mantequilla aumenta al aumentar el precio de la margarina y este aumento es mayor cuanto menor es el precio de la mantequilla.
ii) Si el precio de la mantequilla aumenta un 2% la demanda de mantequilla disminuye aproximadamente en un 4%.
iii) Si el precio de la mantequilla aumenta en 20 céntimos de euro el kilo entonces la demanda de mantequilla disminuye aproximadamente en 100 kilogramos.

20. Considere la función de producción $Q = f(K,L,t)$, donde Q, K, L y t denotan la cantidad de producto, el capital, el trabajo y el tiempo respectivamente. Exprese los siguientes hechos mediante derivadas parciales primeras o segundas.
a) La cantidad producida disminuye cuando disminuye el capital.
b) La cantidad producida es decreciente en t.
c) El incremento en la cantidad producida debida a un aumento en L es mayor para valores grandes de t.
d) La productividad marginal del trabajo es decreciente en K.

21. Considere la función de producción $q = f(L,K) = \left(L^\alpha + K^\beta\right)^2$ donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, L es el factor trabajo y K es el factor capital.
a) Calcule las productividades marginales del trabajo y del capital.
b) Analice como función de los parámetros si las productividades marginales de los factores son crecientes o decrecientes en L y/o en K.
c) Suponga que $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$ y que actualmente $L_0 = 16$ y $K_0 = 1$.
i) Si la cantidad empleada del factor K aumenta en un 2%, ¿en qué medida se ve afectada la producción? ¿Cómo afecta a las productividades marginales de los factores?
ii) Si se despide a un trabajador, ¿cuál sería la cantidad aproximada producida? ¿Se ve afectada la productividad marginal del capital?

22. Sea
$$B(L,p,w) = pL^{1/2} - wL$$
el beneficio obtenido por una empresa cuando produce $y = L^{1/2}$ unidades del bien Y empleando L unidades de trabajo, siendo p y w los precios del bien producido y del factor trabajo respectivamente. Actualmente, cuando los precios son $p = 12$ y $w = 2$, la empresa emplea $L = 4$ unidades de trabajo.
a) Calcule el gradiente y la matriz hessiana de B en el punto $(L_0, p_0, w_0) = (4, 12, 2)$.

b) Justifique, usando las derivadas calculadas en el apartado (a), si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.
(i) Si emplease una menor cantidad de trabajo los beneficios aumentarían.
(ii) Si aumentase la cantidad empleada de trabajo, el beneficio extra de una unidad adicional de trabajo aumentaría.
(iii) La disminución del beneficio al disminuir L en una unidad sería mayor si w disminuyese.
(iv) El beneficio adicional de una unidad extra de trabajo es mayor cuando p es pequeño que cuando p es grande.

23. Considere la función de producción Cobb-Douglas $q = f(L, K) = L^{\alpha}K^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$, L es el factor trabajo y K es el factor capital.
a) Encuentre las productividades marginales del trabajo y del capital, PM_L y PM_K.
b) Analice si estas productividades marginales son crecientes o decrecientes en L y/o en K. Verifique que

$$\frac{\partial PM_L}{\partial K} = \frac{\partial PM_K}{\partial L}$$

c) Calcule las productividades medias del trabajo y del capital, $Pm_L = q/L$ y $Pm_K = q/K$. Analice si estas productividades medias son crecientes o decrecientes en L y/o en K. ¿Se cumple ahora que$\frac{\partial Pm_L}{\partial K} = \frac{\partial Pm_K}{\partial L}$?

24. Considere un mercado con dos bienes de consumo 1 y 2, con precios p_1 y p_2, y un consumidor con renta m. La cantidad demandada de bien 1 por este consumidor viene dada por

$$D(p_1, p_2, m) = \frac{mp_2}{p_1^2}$$

a) Calcule aproximadamente la variación en la cantidad demandada de bien 1 si:
(i) p_1 aumenta en una centésima.
(ii) p_2 disminuye una décima.
b) Calcule las elasticidades precio de la demanda.
c) Calcule aproximadamente la variación porcentual en la cantidad demandada del bien 1 si:
(i) p_1 aumenta un 1%.
(ii) p_2 disminuye un 1%.
d) ¿Cuándo será mayor la variación, en valor absoluto, de D frente a un incremento infinitesimal de p_1: (i) en una situación en que p_2 es grande o (ii) en una en que es pequeño?
e) Estudie el comportamiento de la función de demanda D cuando: (i) $p_1 \to 0$; (ii) $p_1 \to \infty$; (iii) $p_2 \to 0$; (iv) $p_2 \to \infty$.
f) Represente gráficamente D como función de p_1 si $m = 10$ y $p_2 = 1$.Encuentre el dominio de existencia y continuidad de esta función.
g) Sea $p_2 = 1/2$. Represente gráficamente las combinaciones (p_1, m) de precios y rentas que mantienen D constante e igual a 2.

25. La cantidad demandada del bien Y por un consumidor viene dada por

$$y = \frac{4mp_x}{p_y(4p_x + p_y)},$$

donde m es la renta del individuo, p_y es el precio de cada unidad del bien Y y p_x es el precio de otro bien de consumo X.
a) Calcule la elasticidad de la demanda respecto del precio p_y y compruebe que la demanda es elástica en p_y.
b) Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación. "La proporción en la que disminuye la demanda al aumentar p_y infinitesimalmente, es siempre mayor que la proporción en la que aumenta el precio p_y.

TEMA 2

APROXIMACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1. Calcule la diferencial de las siguientes funciones en los puntos $\overline{x}^0$ indicados.

$$\text{a) } f(x_1,x_2) = x_2 \ln\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right), \quad \overline{x}^0 = (1,1); \quad \text{b) } f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 e^{2x_1+x_2} + x_3, \quad \overline{x}^0 = (0,0,1)$$

2. Considere las funciones

$$\text{(a) } f(x,y) = 8\,(x+1)^{1/2}\, y; \quad \text{(b) } f(x,y) = \ln(x+1) + 2y.$$

a) Calcule el gradiente y la diferencial de f en el punto $(0,1)$.
b) Calcule el plano tangente para cada una de esas funciones en $(0,1)$

3. La función de beneficios de una empresa es $B(K,L) = 16K^{1/4}L^{1/4} - 4K - L$ donde K es la cantidad de capital y L la de trabajo. Actualmente $(K,L) = (1,16)$.
a) Explique cuál de las siguientes alternativas te parece más adecuada para aumentar el beneficio:
i) Aumentar la cantidad de capital en una décima.
ii) Disminuir la cantidad de trabajo en una unidad
iii) Aumentar la cantidad de capital en cinco centésimas y disminuir el trabajo en una unidad.
b) Calcule el plano tangente a la gráfica de $B(K,L)$ en $(K,L,B_0) = (1,16,12)$ y úselo para saber cuál es aproximadamente el beneficio si K aumenta en media unidad y L se incrementa un 10%.

4. La cantidad demandada de bien X_1 por un consumidor con renta m viene dada por

$$x = f(p_1,m) = \frac{m-8}{2p_1},$$

siendo p_1 el precio de dicho bien. Actualmente $p_1 = 1$ y $m = 12$.
a) Determine el dominio natural de definición de la función de demanda f y represéntelo gráficamente.
b) Calcule las elasticidades renta y precio de la demanda anterior.
c) Si p_1 disminuye en un 2% y m aumenta en un 1%, ¿en qué porcentaje aproximado aumenta la cantidad demandada?

5. La cantidad de producto producida por cierta empresa viene dada por $f(K,L)$ donde f es diferenciable y se sabe que $f(4,1) = 32$ y $\nabla f(4,1) = (4,48)$. Calcula la variación porcentual en la cantidad de producto si K se incrementa un 2% y L disminuye un 2%.

6. Sea la función de producción $f(K,L) = L + \ln K$. Se pide:
a) Dominio de la función. ¿Es una función siempre positiva? Indica su dominio natural.
b) Indica y representa la curva de nivel que contiene al punto (1, 3). Representa todas las combinaciones de L y K que proporcionan un nivel de producción mayor o igual que 3.
c) Calcula el plano tangente a $f(K,L)$ por el punto $(1,3)$ y obtén, de forma aproximada, la cantidad de producto si L disminuye en un 10% y K se incrementa en dos décimas.

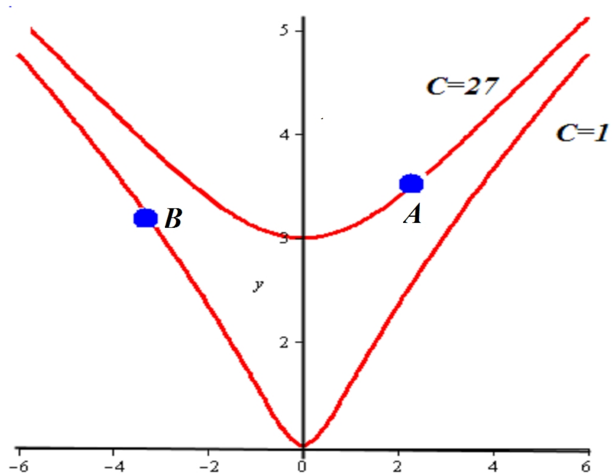
7. Sean las funciones

$$f(x,y) = xy + \frac{2y}{x} \quad \text{y} \quad g(x,y) = ye^{-(x-1)}.$$

a) Calcule $\nabla f(1,4)$ y $\nabla g(1,4)$.
b) Diga si la dirección $(\Delta x, \Delta y) = (1,2)$ es de crecimiento o decrecimiento para f y para g en el punto $(1,4)$.
c) La dirección de variación nula para g en el punto $(1,4)$,¿es de aumento o descenso para f en $(1,4)$?
d) Calcule las direcciones que son de aumento tanto para f como para g en el punto $(1,4)$.

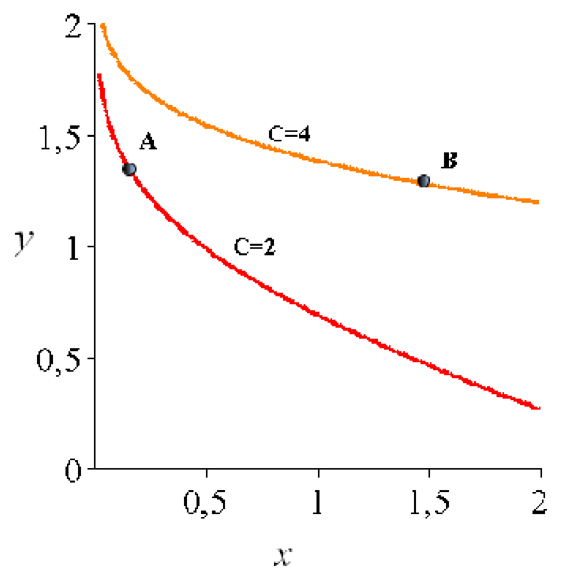
8. En una economía existen dos bienes, x e y, que se consumen en cantidades no negativas. Hay un consumidor cuya función de utilidad viene dada por la función $u(x,y) = y + \sqrt{x}$.
a) Represente la curva de nivel de valor 1 y la curva de nivel que pasa por el punto $(x,y) = (1,2)$ indicando hacia donde crece la función.
b) Dibuje el vector gradiente de u en el punto $(1,2)$ junto con la curva de nivel de u que pasa por $(1,2)$. ¿Qué observas?

9. En el gráfico que aparece a continuación están las curvas de nivel de valor 1 y 27 de cierta función.



a) Si estando en el punto A la primera de las variables aumenta ligeramente ¿el valor de la función aumenta o disminuye? ¿Y si la que aumenta es la segunda de las variables?
b) Si estando en el punto B la primera de las variables aumenta ligeramente ¿el valor de la función aumenta o disminuye? ¿Y si la que aumenta es la segunda de las variables?
c) Dibuja en ese gráfico el gradiente de la función en los puntos A y B marcados en azul.

10. En el siguiente gráfico aparecen las curvas de nivel de valor 2 y 4 de cierta función $f(x, y)$ con derivadas parciales primeras continuas.



a) Dibuja en el punto A la dirección de variación nula para f partiendo del punto A. Dibuja en el punto B la dirección de máximo aumento para f partiendo del punto B.
b) ¿Qué signo tienen las derivadas parciales de f en el punto B? Si estando en el punto B se pudiera elegir entre aumentar x en una décima o aumentar y en una décima ¿cuál de las dos opciones aumentaría más el valor de la función?

11. Dada la función $f(x, y) = 2ye^{1-x}$
a) Diga si $(\Delta x, \Delta y) = (1, 2)$ es una dirección de crecimiento o decrecimiento a partir del punto $(1, 1/4)$
b) Repita el apartado anterior a partir del punto $(1, 4)$.

12. Considere la función de producción $q = 36K^{1/3}L^{2/3}$, donde K y L son respectivamente las cantidades empleadas de capital y trabajo para producir q unidades de bien. Actualmente, $K_0 = 64$ y $L_0 = 27$.
a) Si se añaden 1 unidad de capital y 2 de trabajo, ¿en qué cuantía aproximada aumentará la cantidad producida?
b) Si se aumentase la cantidad empleada de capital un 2%, ¿en qué porcentaje aproximado debería disminuir la cantidad empleada de trabajo para que la producción permanezca constante?
c) ¿Para qué combinaciones de incrementos marginales de capital y trabajo aumenta más la producción?

13. Sea
$$B(x_1, x_2) = px_1^{1/2}x_2^{1/3} - w_1x_1 - w_2x_2$$
el beneficio obtenido por una empresa cuando produce $y = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$ unidades del bien Y empleando (x_1, x_2) unidades de los factores de producción X_1 y X_2, siendo p, w_1 y w_2 los precios del bien producido y de los factores X_1 y X_2 respectivamente. Actualmente, cuando los precios son $p = 12$, $w_1 = 1$ y $w_2 = 8$, la empresa produce 2 unidades de bien Y empleando $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$ unidades de los factores X_1 y X_2.
a) ¿Podría ser $(4, 1)$ la combinación de factores que maximiza el beneficio?
b) Si se aumenta la cantidad empleada del factor X_2 en un 2%, ¿en qué porcentaje aproximado varía el beneficio?
c) Si disminuimos la cantidad empleada del factor X_1 en 4 décimas, ¿cuál sería aproximadamente el nuevo beneficio?
d) ¿Cuál sería la variación aproximada en el beneficio como consecuencia de las medidas tomadas en (b) y (c)?
e) ¿En qué cuantía aproximada se debe variar x_1 para que al aumentar x_2 en un 2% la cantidad producida no varíe?

14. La función de utilidad de un consumidor es $U(x, y) = x + \ln y$ donde x e y representan los niveles de consumo de dos bienes X e Y respectivamente. Actualmente $(x, y) = (0, 1)$.
a) Calcule la curva de nivel que contiene a la cesta $(0, 1)$. Represente gráficamente el conjunto de todas las combinaciones de bienes preferidos o indiferentes a la cesta $(0, 1)$.
b) Calcule la recta tangente a la curva de nivel anterior en el punto $(0, 1)$.
c) Calcule el incremento aproximado de $U(x, y)$ si x aumenta en una décima. Calcule el incremento aproximado de $U(x, y)$ si y se incrementa en una décima. Justifique que, en un punto cualquiera (x, y) con $y > 1$, el consumidor siempre prefiere aumentar x.
d) El consumidor desea cambiar los niveles de consumo sin modificar "prácticamente" su utilidad. ¿Cómo debería alterar los niveles de consumo x e y? ¿Qué relación existe entre este vector y la recta tangente calculada en el apartado (b)?
e) Justifique la siguiente relación: $U(x, y) \simeq x + y - 1$, para todo punto (x, y) cercano al punto $(0, 1)$.

15. Una fábrica dispone de 16 máquinas y 16 trabajadores. Su función de producción viene dada por
$$f(K, L) = K^{1/2}L^{1/2}$$
donde K son las máquinas y L el trabajo. El precio de una máquina es 2 u.m. y el precio del trabajo es 4 u.m. El precio de venta del producto es 10 u .m. Se pide:
a) ¿En qué proporción se incrementarán capital y trabajo si se desea aumentar el beneficio lo máximo posible?
b) Supongamos que el empresario debe decidir entre contratar una máquina más o un trabajador más. ¿Cuál será su decisión?
c) Una avería deshabilita dos máquinas. ¿Cómo elegir la cantidad de trabajo para mantener, aproximadamente, el nivel de producción?
d) Calcula la variación porcentual aproximada de la producción si K aumenta en un 2% y L disminuye en un 5%.

16. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $2xy - e^x y^3 + 1 = 0$ en el punto $(x, y) = (0, 1)$.

17. Calcula la pendiente de las curvas definidas por las siguientes expresiones en los puntos indicados

(i) $xy - e^{x^2}y^2 + 1 = 0$ en el punto $(x, y) = (0, 1)$
(ii) $yx^2 + y^2x = 6$ en el punto $(x, y) = (1, 2)$

En ambos casos calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.

18. Sea la función $f(x) = x - e^{2x}$.
a) Halle la recta tangente en el punto $x_0 = 0$.
b) Use la recta obtenida en (a) para calcular aproximadamente $f(0.2)$. Compare los resultados obtenidos con los dados por la calculadora.
c) Halle el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $x_0 = 0$ y úselo para calcular aproximadamente $f(0.2)$. Compare los resultados con los obtenidos en (b).

19. Utilice polinomios de Taylor de grado 1 y 2 para calcular aproximadamente: (i) $\ln(1.05)$; (ii) $\sqrt{4.2}$. Compare los valores obtenidos con los que proporciona la calculadora.

20. Sea $F(u, v)$ una función de la que se sabe que $F(1, 3) = 2, \nabla F(1, 3) = (-1, 4)$ y $HF(1, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.
(i) Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el punto $(1, 3)$
(ii) Halla la recta tangente en $(1, 3)$ a la curva de nivel de F que pasa por $(1, 3)$
(iii) Halla su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 3)$.

21. Sea la función de producción $f(K, L) = K^{1/2}L + K$ donde K es el capital y L es el trabajo. Dí si son ciertas las siguientes afirmaciones, justificando tu respuesta:
a) La productividad marginal del capital es mayor cuanto mayor es el capital
b) La función cuadrática que mejor aproxima a $f(K, L)$ cerca del punto $(K, L) = (4, 8)$ es

$$g(K, L) = -8 + 3K + 2L + \frac{1}{4}(K - 4)(L - 8) - \frac{1}{8}(K - 4)^2$$

c) Si estando en el punto $(K, L) = (4, 8)$ la variable K se incrementa una cantidad pequeña ΔK, entonces para mantener aproximadamente el valor de f constante la variación en L debe cumplir $\Delta L = -\frac{3}{2}\Delta K$.

22. Halle el polinomio de Taylor de orden 1 y de orden dos para las siguientes funciones en los puntos indicados.
a) $f(x, y) = \ln((x - 1)(y - 2)) + xy$ en $(x_0, y_0) = (2, 3)$
b) $f(x, y, z) = \ln x^2 + e^{2y-4} + xyz$ en $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$

23. Utilice polinomios de Taylor de grado 1 y 2 de una función de 2 variables para calcular aproximadamente

$$\text{(a) } 0.98e^{0.01}; \quad \text{(b) } \frac{\ln(0.97)}{1.1}.$$

Compare los valores obtenidos con el que proporciona la calculadora.

24. Sea $t_2(x, y) = 1 + x - 2y + \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - 2xy$ el polinomio de taylor de segundo orden de una función $f(x, y)$ en el punto $(x, y) = (0, 1)$.
a) Halla $f(0, 1), \nabla f(0, 1)$ y $Hf(0, 1)$.
b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 1 para f en $(0, 1)$.

25. El polinomio de Taylor de segundo orden de una función de beneficios $B(K, L)$ con derivadas parciales primeras y segundas continuas en el punto $(K_0, L_0) = (1, 4)$ es

$$t_2(K, L) = 32L - 4L^2 - 62 - \frac{1}{2}(K - 1)^2$$

Halla $B(1, 4)$, $\nabla B(1, 4)$ y $HB(1, 4)$. ¿Puede ser (1,4) un máximo de la función de beneficios?

TEMA 3

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO MULTIVARIANTE

1) DERIVACIÓN DE CAMPOS COMPUESTOS.

1. Sea h la función que relaciona la variable y con la variable u, donde $y = xe^{-x}$ y $x = u + u^{3/2}$. Calcule $h'(u)$ y $h'(0)$.

2. Sea $z = x^2 + 2\sqrt{y+1}$, donde $y = x \ln x$ y $x = 1/t$. Calcule dy/dt y dz/dt en el punto $t = 1$.

3. Sea h la función que relaciona la variable y con las variables $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, donde $y = x^2 \ln(x-4)$ y $x = u_1 + 2u_2 + u_3$. Calcule $\nabla h(\overline{u})$ y $\nabla h(2,0,3)$.

4. Sea $z = \left(u + xy^2\right)^3$, siendo $x = u + 2v$ e $y = uv$. Establezca un diagrama de dependencias entre las variables involucradas y úselo para calcular $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ en el punto $(u_0, v_0) = (1, 1)$.

5. Considere la función $y = x_1 x_2^2 + 2x_2 x_3 + \ln(x_1 x_2 x_3)$, siendo $x_1 = (uv)^{1/2}$, $x_3 = uv + v$, $v = e^t + \cos t$, $t = 4u$. Establezca un diagrama de dependencias entre las variables involucradas y úselo para calcular dx_1/du, $\partial y/\partial v$ y $\partial y/\partial u$.

6. Sea $F(x) = f\left(x + g(x), x^2 + 1\right)$, siendo $f(u, w) = uw^2$ y $g(x) = 4x(x+1)^{-1}$. Se pide:
a) Definiendo las variables $u = x + g(x)$, $w = x^2 + 1$ e $y = F(x)$, dibuje el esquema de dependencia entre dichas variables.
b) Use la regla de la cadena para calcular $F'(1)$.

7. Sea la función de producción $q = F(L, K)$. Suponga que las cantidades empleadas de los factores L y K son funciones del tiempo, $L = f(t)$ y $K = g(t)$.
a) Halle la tasa de variación temporal de q.
b) Calcule dq/dt en el punto $t = 0$ si se sabe que $f(0) = 2$, $g(0) = 4$, $f'(0) = 2$, $g'(0) = 1/4$ y $\nabla F(2, 4) = (1, 2)$

8. En cierta economía se cumplen las relaciones

$$\begin{cases} y = f(k) \\ k = g(n, \delta, s) \end{cases}$$

donde y y k son respectivamente la renta y el capital per-cápita y n, δ y s son las respectivas tasas de crecimiento de la población, de depreciación del capital y la del ahorro. Las funciones f y g son funciones desconocidas de las que se sabe que $f'(k) > 0$ y $\partial g/\partial s > 0$.
a) Represente en un esquema de dependencias la variable y en función de (n, δ, s) y úselo para estudiar si y aumenta o disminuye cuando s varía infinitesimalmente.
b) El consumo per-cápita es

$$c = f(k) - (n + \delta)k.$$

Represente en un esquema de dependencias c como función de (n, δ, s) y calcule $\partial c/\partial s$.

9. Cuando se producen x unidades de bien una empresa obtiene unos beneficios de $b = 4x - C(x)$. La cantidad producida es una función de los salarios w pagados y viene dada por $x = f(w)$. Por otra parte, los salarios varían con el tiempo teniéndose que $w = h(t)$.
a) Exprese el beneficio como función de t.
b) Calcule db/dw, dx/dt y db/dt. ¿Podría determinar el signo de estas derivadas si se sabe que $C'(x) > 0$, $f'(w) < 0$ y $h'(t) > 0$?
c) Suponga que $C(x) = x^2$, $f(w) = 8/w^2$ y $h(t) = 1 + t/(t+1)$. Actualmente estamos en el instante $t = 0$. Calcule aproximadamente el salario, la cantidad producida y el beneficio para el próximo mes ($t = 1/12$).

10. La demanda del bien X viene dada por la función

$$x = f(p, q, m) = \frac{m - 2q + p}{2p},$$

donde p es el precio del bien X, q es el precio de otro bien de consumo y m es la renta. Se sabe que el precio q es una función diferenciable de p y otra variable w, $q = g(p, w)$. Actualmente $p = 2$, $q = 1$, $w = 5$ y $m = 80$. Además, $\nabla g(2, 5) = (1, 2)$. Calcule aproximadamente la cantidad demandada del bien X si p aumenta en un 2% y w disminuye en dos décimas.

11. Cuando se producen x unidades del bien X y se venden a un precio p empleando L trabajadores a los que se les paga un salario w, el benefico obtenido es $px - wL$. Las curvas de demanda de bien y de oferta de trabajo son $p = 9w - x/4$ y $w = \left(3L^{1/2} + 4\right)/5$ respectivamente. La tecnología con la que opera la empresa viene dada por la función de producción $x = f(L) = 2L^2$. Actualmente la empresa tiene empleados a $L_0 = 4$ trabajadores.
a) Calcule el salario pagado, la cantidad producida de bien, el precio de venta y el beneficio obtenido por la empresa anterior.
b) Si la empresa decidiese contratar un trabajador adicional, calcule aproximadamente:
(i) El efecto en el salario pagado.
(ii) El efecto en la cantidad producida.
(iii) El efecto en el precio de venta.
(iv) El efecto en los beneficios.

12. Sea $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$, donde $f(u, w, z) = -u^2 w + z$, $h(x) = 1 + x^2$, y $g(x, y) = -x + y$. Calcule $\nabla F(1, 2, 3)$.

13. Sea h la función que proporciona z como función de (x, u) siendo

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = \ln(4 - x) + \frac{y + 1}{4 - x} \\ y &= g(x, u) = \frac{(u + 3)^2}{x + u} + u \end{aligned}$$

a) Construya el esquema de dependencias para h.
b) Calcule $h(3, 2)$.
c) Calcule la variación porcentual aproximada que experimenta h si estando en $(x, u) = (3, 2)$ la variable x se incrementa un 4% y la variable u disminuye un 8%.
d) Calcule el valor aproximado de $h(3.1, 2.2)$.
e) Halle el plano tangente a h en el punto $(3, 2)$.

14. Cuando se producen y unidades de bien Y, los beneficios de una empresa vienen dados por la función

$$\pi(p, w, r, y) = py - g(w, r, y),$$

donde $g(w, r, y)$ es la función de costes y p, w y r son respectivamente los precios del bien Y y de los factores de producción trabajo y capital. Se sabe que

$$g(w, r, y) = \frac{wr}{4(w + r)} y^2 \quad \text{e} \quad y = \frac{2p(w + r)}{wr}.$$

Actualmente $w = 1$, $r = 1$ y $p = 2$. Si los precios w y r aumentan un 2%, calcule aproximadamente:
a) La variación en la cantidad producida.
b) La variación en los costes.
c) La variación en los beneficios.
d) La cuantía en la debería variar el precio p para que el beneficio permanezca constante.
e) El porcentaje en que debería aumentar el precio p para que no varíe la cantidad producida.

15. El bienestar de un individuo cuando consume cantidades x e y de los bienes X e Y viene medido por la función de utilidad $U(x, y) = x^3 y$. Por otra parte, las cantidades consumidas de los bienes X e Y dependen de los precios p_x y p_y de cada uno de los bienes y de la renta m del individuo según las funciones

$$x = x^D(p_x, p_y, m) = \frac{3m}{4p_x}; \qquad y = y^D(p_x, p_y, m) = \frac{m}{4p_y}.$$

Actualmente $(p_x^0, p_y^0, m_0) = (1, 2, 40)$.
a) Si los precios p_x y p_y aumentan en un 4%, calcule aproximadamente:
i) La cantidad demandada de bien X.
ii) La cuantía mínima en la que debería aumentar la renta para que la subida de precios no haga disminuir las cantidades demandadas de X e Y
iii) La cuantía en la que debería aumentar la renta para que el consumidor mantenga su nivel de bienestar.
b) Suponga, ahora, que la renta del individuo es una función de los precios, $m = 20p_x + 10p_y$.
i) Si p_x aumenta en un 4%, ¿cuál debería ser la variación aproximada en p_y para que la demanda del bien X no varíe?
ii) Represente gráficamente el conjunto de precios (p_x, p_y) para los que $x \geq 20$ e $y \geq 5$.

16. Una empresa produce carbón vegetal usando madera, y lapiceros usando carbón y madera. Se sabe que $A = m_A C$ son los lapiceros fabricados cuando se emplean cantidades m_A y C de madera y carbón respectivamente, y que $C = 3(1-0.03m_C)m_C$ es la cantidad producida de carbón con una cantidad m_C de madera. Para producir la cantidad M de madera se emplea trabajo L y capital K según la función de producción $M = 3KL^2$. La tercera parte de la producción de madera se destina a la producción de carbón y el resto a la producción de lapiceros. Actualmente, $K = L = 1$. Calcule los valores correspondientes de M, m_A, m_C, C y A, y use estos valores para obtener:
a) La productividad marginal del carbón y la madera en la producción de lapiceros.
b) La productividad marginal de la madera en la producción de carbón.
c) La productividad marginal del capital y del trabajo en la producción de la madera.
d) La productividad marginal del capital y del trabajo en la producción de lapiceros.

2) FUNCIONES HOMOGÉNEAS

17. Sean las funciones

$$f(x,y) = xy + 2x^2; \quad g(x,y) = \tfrac{4xy}{x^2+2y^2}; \quad h(x,y) = \sqrt{x^2 - 3y}; \quad i(x,y) = \tfrac{x^2}{x+y}$$

a) Estudie si son homogéneas utilizando la definición
b) Para aquellas funciones que sean homogéneas estudie qué sucede con el valor de la función si
(i) las dos variables se duplican
(ii) las dos variables se reducen a la mitad.

18. Sea $B(L,K)$ la función de beneficios de una empresa de la cual se sabe que $B(5,3) = 68$, el beneficio marginal del factor K en el punto $(5,3)$ es 10 y la función es homogénea de grado 1. Se pide:
a) El beneficio exacto si $L = 15$ y $K = 9$.
b) El beneficio exacto si L y K se incrementan un 2%
c) El beneficio marginal del trabajo en $L = 5, K = 3$.

19. Sea $x = D(p,w)$ la cantidad demandada de bien X por un consumidor de renta w cuando el precio del bien es p. Se sabe que $D(p,w)$ es una función diferenciable y que para $\lambda > 0$, $D(\lambda p, \lambda w) = D(p,w)$.
a) Si $D(p_0, w_0) = 3$, ¿cuál es la demanda tras un aumento de un 4% en el precio y la renta?
b) Si se sabe que $\frac{\partial D}{\partial w}(2,3) = 2$, ¿cuánto vale $\frac{\partial D}{\partial p}(2,3)$?
c) Si $D(2,3) = 3$ y $\frac{\partial D}{\partial w}(2,3) = 2$,calcule aproximadamente $D(1.99, 3.01)$. ¿Podría calcular $D(1.99, 3.01)$ de manera exacta?

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y homogénea de grado 2. Se sabe que $\nabla f(\overline{x}^0) = (4,2,0)$ y que $\nabla f(\overline{x}^1) = (6,4,2)$, siendo $\overline{x}^0 = (2,1,0)$, y $\overline{x}^1 = (3,2,1)$. Sea $\Delta y = f(\overline{x}^1) - f(\overline{x}^0)$.
a) Calcule Δy.
b) Use la diferencial en en el punto $\overline{x}^0$ para calcular aproximadamente Δy. Compare este resultado con el valor exacto obtenido en el apartado (a).

21. Sea la función de producción $y = f(L,K) = 8L^{1/4}K^{3/4}$. Actualmente, $L = 16$ y $K = 1$.
a) ¿Es $f(L,K)$ una función homogénea? Dí si sus rendimientos a escala son crecientes, son decrecientes o son constantes.
b) ¿Son homogéneas las productividades marginales?
c) Calcule la cantidad aproximada producida si L y K aumentan un 4%. ¿Cuál es la cantidad exacta producida?
d) Calcule la cantidad aproximada producida si $L = 16.2$ y $K = 1.2$. ¿Cuál es la cantidad exacta producida?
NOTA1: Una función de producción homogénea de grado α tiene rendimientos a escala decrecientes, crecientes o constantes si $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ respectivamente.
NOTA2: Encontrarás una explicación a lo observado en el apartado c) en el siguiente ejercicio.

22. Empleando (x_1, x_2) unidades de dos factores productivos se producen $q = f(x_1, x_2)$ unidades de cierto bien. Se sabe que la función de producción es diferenciable y homogénea de grado α. Actualmente, se emplean $\overline{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ unidades de los factores y se produce la cantidad $q_0 = f(\overline{x}^0)$. Suponga que la empresa aumenta en un 10% las cantidades empleadas de los factores y pasa a producir $q_1 = f(\overline{x}^1)$ unidades.
a) Pruebe que $q_1 = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{\alpha} q_0$.
b) Use la diferencial y el teorema de Euler para probar que $q_1 \simeq \left(1 + \frac{\alpha}{10}\right) q_0$.
c) Compruebe que si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ la aproximación dada en (b) coincide con el valor exacto dado en (a).

23. La cantidad de trabajo L es una función del precio w por unidad de trabajo y del precio p por unidad producida. Se sabe que $L(p,w)$ es una función con derivadas parciales primeras continuas que cumple que

$$p\frac{\partial L}{\partial p}(p,w) + w\frac{\partial L}{\partial w}(p,w) = 0$$

para todo (p,w). Actualmente $(p_0, w_0) = (8,2)$, $L(8,2) = 4$ y la elasticidad del trabajo respecto de p en $(8,2)$ es igual a 2.

a) Calcule cuál es exactamente la cantidad de trabajo si estando en $(p_0, w_0) = (8,2)$ los precios p y w se incrementan un 2%.¿Cuál es la cantidad aproximada que proporciona la mejor función lineal para $L(p,w)$ en (8,2)?
b) Calcule el gradiente de $L(p,w)$ en $(p,w) = (8,2)$.¿Cuál es el gradiente de $L(p,w)$ en $(p,w) = (4,1)$?

24. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado 3 cumpliendo

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \quad \text{y} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3y^2.$$

Use el teorema de Euler para encontrar $f(x,y)$.

25. El capital per-cápita k en una economía viene dado por la función $k = (\frac{s}{n+\delta})^{3/2}$ donde s es la propensión marginal al ahorro, $0 < s < 1$, $\delta > 0$ es la tasa de depreciación y $n > 0$ es la tasa de crecimiento de la población.
a) ¿Cuál sería la variación aproximada del capital per-cápita si n aumenta una cantidad pequeña Δn. Estudie qué sucede con k si δ disminuye en 0.01 unidades y n aumenta en 0.01 unidades.
b) ¿Es cierto que la variación que experimenta k cuando aumenta s es mayor cuando n es grande?
c) ¿Es la función dada homogénea? Si s, n y δ aumentan en la misma proporción entonces k, ¿aumenta, disminuye o permanece igual?
d) Compruebe que $\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial \delta}$ y use este hecho, junto con el teorema de Euler, para demostrar que se cumple

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial \delta} = -(\frac{s}{n+\delta})\frac{\partial k}{\partial s}$$

26. Cuando se emplean (L,K) unidades de los factores trabajo y capital una empresa obtiene un beneficio dado por $b = pf(K,L) - rK - wL$, donde $f(K,L)$ es la función de producción y p, w y r son los respectivos precios del bien producido y de los factores trabajo y capital. Por otra parte, se sabe que

$$K = \frac{p^3}{wr^2}, \quad L = \frac{p^3}{rw^2} \quad \text{y} \quad f(K,L) = 3(KL)^{\frac{1}{3}}$$

Actualmente los precios son $p_0 = 1$, $w_0 = \frac{1}{2}$ y $r_0 = \frac{1}{2}$.
a) Son las cantidades empleadas de factores funciones homogéneas?
b) ¿Es la cantidad producida homogénea en precios?
c) ¿Es el beneficio una función homogénea en precios?
d) Si los precios se duplican, ¿qué sucede con el capital, el trabajo y los beneficios?

27. Si f es una función homogénea de grado cero entonces

$$f(x,y) = f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = x^0 f(1, \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = g(s)$$

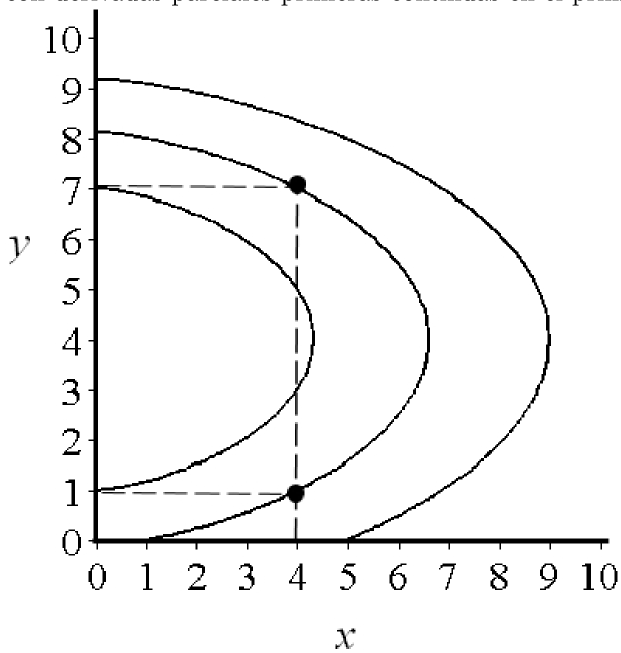
donde $s = \frac{y}{x}$ y $g(s) = f(1,s)$.
a) Diga si las siguientes funciones son homogéneas. Para las que sean homogéneas de grado cero exprésela s como una función de una única variable $g(s)$.

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^2}{y(x+y)};\ b)\ f(x,y) = \frac{x^3}{y(x+y)} + 1;\ c)\ f(x,y) = \ln(\frac{x}{x+y}) + 1$$

b) Diga cuáles de las funciones anteriores no son homogéneas pero son homotéticas.

28. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de la que se sabe que $f(1,2) = 3$, $\nabla f(1,2) = (-5,1)$ y $Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Halle el grado de homogeneidad.
b) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 para f en el punto $(2,4)$

29. En el gráfico que aparece a continuación están las curvas de nivel de valor 13, 3 y 21 de cierta función $g(x, y)$ con derivadas parciales primeras continuas en el primer cuadrante. Se sabe que $\nabla g(4, 1) = (-3, 6)$.



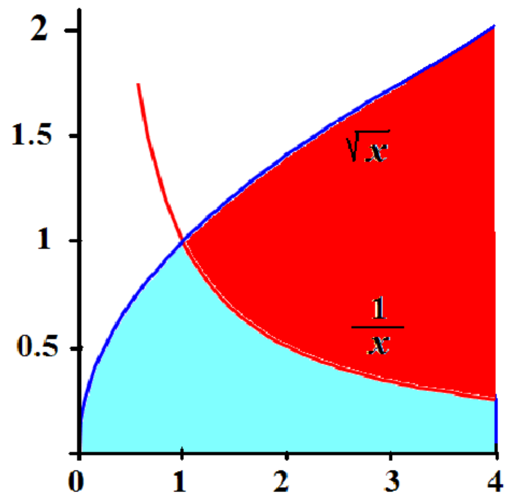
a) Identifique a qué valor corresponde cada una de esas curvas de nivel y dibuje en el punto $(4, 7)$ un vector que tenga la misma dirección y sentido que $\nabla g(4, 7)$.
b) Halle $g(4, 1)$ y la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en el punto $(4, 1, g(4, 1))$
c) A la vista de estas curvas de nivel ¿puede ser la función g homogénea? ¿Puede ser homotética?

30. Sea $f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas y homogénea. Estudie si sus elasticidades parciales son funciones homogéneas.

TEMA 4

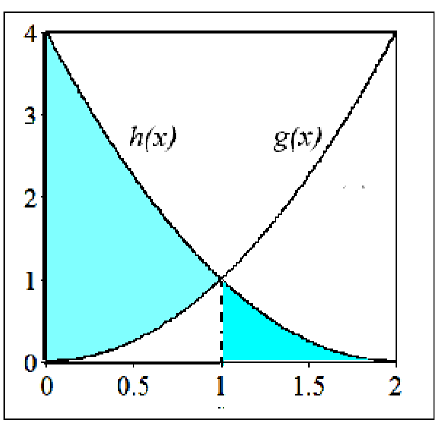
CÁLCULO INTEGRAL

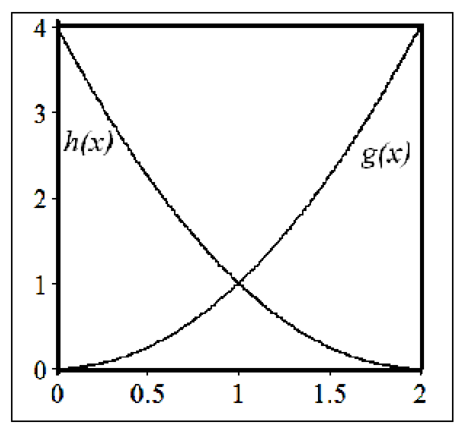
1. Calcule el área del recinto señalado en rojo, y el área del recinto en azul



2. Halle el área del recinto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4 - x^2 \text{ e } y \geq 6 - 3x\}$.
Indicación: para dibujar el recinto es conveniente que halle los puntos de corte de las curvas $y = 4 - x^2$ y $y = 6 - 3x$.

3. Expresa mediante integrales el área del recinto señalado en el gráfico de la izquierda y señala en el gráfico de la derecha el área que corresponde a $\int_0^1 h(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$





4. Calcule las siguientes integrales inmediatas

$a)\ \int (x + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3})dx$	$f)\ \int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}dx$	$k)\ \int \frac{e^x dx}{1+e^x}$
$b)\ \int (\sqrt{7x} + e^{4x} + e^{-x/2})dx$	$g)\ \int \sin x(\cos x + 1)^{1/3}dx$	$l)\ \int x^2(3x^3 + 1)^4 dx$
$c)\ \int (2^x + e^{-x})dx$	$h)\ \int \frac{\sin(x)dx}{1+\cos^2 x}$	$m)\ \int x(e^{2x^2} + 1)dx$
$d)\ \int (2^{2x} + e^{-3x})dx$	$i)\ \int \frac{7dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	$n)\ \int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}dx$
$e)\ \int (\frac{1}{x+1} + 7\cos(2x) - \sqrt{3x+1})dx$	$j)\ \int \frac{3}{x}\ln(x)dx$	$o)\ \int \frac{x^2}{1+x^3}dx$

5. Diga si es cierta o falsa la siguiente afirmación $\int(xe^x + x\ln(x) + \frac{x}{2})dx = e^x(x-1) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + C$ donde C es una constante.

6. Sean las funciones

$$f(x) = 2e^{-3x}; \quad f(x) = 6\,(2x+1)^5; \quad f(x) = \tfrac{x+3}{\sqrt{x}}; \quad f(x) = x - \tfrac{x}{x^2+1}.$$

a) Calcule $\int f(x)dx$.
b) Halle, si fuese posible, una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = 1$.

7. Calcule las siguientes integrales definidas.

$$\text{a)} \int_0^1 x^3(3x^2+1)^2 dx;\ \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x^3+2};\ \text{c)} \int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx;\ \text{d)} \int_1^2 \frac{e^{2/x}}{3x^2}dx$$

8. La población de mosquitos M está creciendo continuamente a un ritmo de $300(1+t)^{-1/2}$ cientos de mosquitos por semana. Si la población de mosquitos en $t = 0$ es de $M_0 = 100$
a) ¿En cuánto aumenta la población de mosquitos entre la tercera y la octava semana?
b) ¿Cuántos mosquitos tendremos al final de la octava semana?
c) Halle la población de mosquitos en el instante T.

9. Producir x unidades de bien X conlleva unos costes $C(x)$. El coste marginal viene dado por la función

$$CM(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 30.$$

Si producir 6 unidades de bien X cuesta 500 euros,
a) ¿Cuál es la función de costes?
b) Calcule $C(0)$ e interprete su significado.
c) Suponga que se producen 6 unidades de bien X. ¿Cuál sería el coste aproximado de una unidad adicional?
d) Calcula cuál es el coste marginal medio en el intervalo $[0, 24]$

10. A partir del dia $t = 0$ un individuo pierde capital a un ritmo de 1000 euros diarios durante 10 días y lo gana a un ritmo de $200(t-10)$ euros diarios a partir del décimo día.
a) Estudie la continuidad de la función $K'(t)$ que da el ritmo de variación del capital.
b) Si el capital inicial era $K_0 = 20000$ euros, obtenga la función $K(t)$ que da el capital del individuo el día t. Represente gráficamente $K(t)$ y estudie los intervalos de crecimiento.
c) ¿Llegará a superar el capital del individuo el nivel inicial de $K_0 = 20000$ euros? ¿En qué instante?

11. El ritmo de variación de la prima de riesgo de España en los últimos 30 días ha sido

$$r(t) = \begin{cases} -\frac{16}{(t+1)^2} & 0 \le t \le 15 \\ 3 & 15 < t \le 30 \end{cases}$$

La prima de riesgo en $t = 0$ fue de 345 puntos.
a) Obtenga la función $R(t)$ que da el valor de la prima de riesgo el día t. ¿Es continua?. ¿Es derivable? Represente gráficamente $R(t)$ y estudie los intervalos de crecimiento.
b) ¿Llegó a superar la prima de riesgo el nivel inicial de $R_0 = 345$ puntos? ¿En qué instante?

12. La financiación de la comunidad autónoma a las universidades públicas el pasado año $(0 \le t \le 1)$ fue en cada instante t de $f_1(t) = 1440 - 720\sqrt{t}$ millones de euros al año. Debido a la crisis económica para el próximo año $(1 < t \le 2)$ la financiación se reducirá un 25%, es decir, vendrá dada por $f_2(t) = 1080 - 540\sqrt{(t-1)}$ millones de euros al año.
a) Halla cuál ha sido la cantidad total aportada por la comunidad durante el primer año.
b) Comprueba que la cantidad aportada en el primer trimestre $(t = 1/4)$ es de 300 millones de euros.
c) Calcula cuál es la financiación media (en millones de euros al año) durante los dos primeros años.
d) ¿Es la función que da la cantidad total aportada hasta el instante t una función continua en $t \in [0, 2]$?¿Es derivable?
e) Halla la cantidad total aportada hasta el instante t para cualquier $t \in [0, 2]$

13. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{si } -2 \le x \le 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 4-x, & \text{si } 1 \le x \le 10. \end{cases}$$

i) Halle la función $F(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$, $t \in [-2, 10]$.
ii) ¿Es la función $F(t)$ continua en el intervalo $(-2, 10)$? ¿Es derivable?
iii) Calcule, si existiesen, $F(1)$, $F(10)$, $F'(0)$, $F'(1)$ y $F'(8)$.

14. El ritmo de variación del precio (en euros) de cada acción de cierta compañía en los últimos 12 meses ha sido

$$p'(t) = \begin{cases} 2 - \frac{2t}{3} & 0 \le t \le 6 \\ \frac{t-10}{2} & 6 < t \le 12 \end{cases}.$$

El precio inicial de las acciones era $p(0) = 10$.
a) Represente gráficamente la función $p'(t)$ e indique en qué intervalos de tiempo el precio ha estado aumentando.
b) ¿Cuál ha sido la variación del precio de las acciones en el primer semestre del año? ¿En qué momento cree que el precio de las acciones ha estado más bajo? Indicación: puede usar argumentos gráficos si lo considera conveniente.
c) Halle el precio de las acciones en cualquier instante $t \in [0, 12]$.¿Cuál es el precio de las acciones en $t = 8$?

15. Sea la función de costes marginales

$$c'(q) = \begin{cases} 2q & 0 \le q \le 10, \\ \frac{120}{(3q+6)^{1/2}} & 10 < q \le 30 \end{cases}$$

donde q es el número de unidades fabricadas.
a) Calcule el coste adicional en el que se incurre si se pasa de producir 5 unidades a producir 25 unidades
b) Sabiendo que los costes fijos son 10 unidades monetarias, halle la función de coste.

16. La función de costes marginales de una empresa depende del número de unidades x producidas y viene dada por

$$CM(x) = \begin{cases} \frac{15}{\sqrt{1+x}} \text{ si } 0 < x \le 8 \\ -\frac{1}{4}x + 7 \text{ si } 8 \le x \le 16 \\ 3 \text{ si } x > 16 \end{cases}$$

y se sabe que el coste de producir 12 unidades es 90 unidades monetarias.
a) Dibuja $CM(x)$ y dí si es continua.
b) Supón que actualmente se están produciendo 3 unidades. Calcula cuál es aproximadamente el coste adicional de producir una unidad más, y señala en el gráfico anterior el recinto cuya área correponde a ese valor aproximado. Dibuja en el gráfico el área del recinto que proporciona el valor exacto, y dí cuál es ese valor exacto.
c) Calcula cuál es el coste de producir 22 unidades.
d) Calcula la función de costes y halla los costes fijos.
e) ¿Es la función de coste continua? ¿Es derivable?
f) Dí cuál es el coste marginal medio cuando se producen x unidades, para $x \in \{8, 16, 32\}$. ¿A qué valor tiende este coste marginal medio cuando el número de unidades es muy grande?

17. El valor actual descontado de un flujo monetario de $f(t)$ unidades monetarias por año (o por unidad de tiempo, que puede ser mensual, diario,...) que se recibirán durante el periodo $[0, T]$ si la tasa de interés es β viene dado por $\int_0^T f(t)e^{-\beta t}dt$. Una conocida marca de café sortea un sueldo de 2000e al mes para toda la vida. Si el ganador del sorteo tiene una esperanza de vida de 15 años y el tipo de interés es del 5% anual ¿cuál es el valor actual descontado del premio que ha ganado?

18. Calcule$F(x)$ y $F'(x)$ para las funciones que aparecen a continuación

$$\text{a) } F(x) = \int_0^{x^2+x} (u+1)^2 du; \quad \text{b) } F(x) = \int_x^3 (u+2)^2 du; \quad \text{c) } F(x) = 4\int_{x^2}^{2x} y^3 dy$$

Compruebe que $F'(x)$ coincide con el valor que se obtiene utilizando el teorema fundamental del cálculo generalizado.

19. Sea $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x)dx$ donde $f(x) = x\cos(x) + (x+2)sen(x)$; $g(x) = \pi - x$ y $h(x) = 2x$. Calcula $F'(x)$ y $F'(0)$ usando el teorema fundamental del cálculo generalizado.

20. Sea $F(x) = \int_{x}^{10} \frac{t^2-4}{t^2+2}dt$ donde $x \in [0, 10]$. ¿Es F una función derivable? En caso afirmativo halle los valores que anulan la derivada de esta función. Analice si estos valores son mínimos, máximos o puntos de inflexión de la función $F(x)$.

TEMA 5

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO INTEGRAL

1. Calcule las siguientes integrales haciendo el cambio de variable que se indica.
   a) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ con el cambio $y = 2 + \sqrt{x}$.
   b) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ con el cambio $y = \sqrt{x}$.
   c) $\int x(x+1)^{1/3}dx$ con el cambio $z = x + 1$.

2. Resuelve $\int_0^4 \frac{e^{2-\frac{x}{2}}}{3+e^{2-\frac{x}{2}}}dx$ utilizando el cambio $t = 2 + e^{2-\frac{x}{2}}$. Indicación: tenga en cuenta que al hacer el cambio de variable los límites de integración cambian.

3. Resuelve $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ con el cambio $x = t^6$.

4. Resuelve $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$ y $\int \frac{x^3+x}{x^2+2}dx$

5. Resuelve mediante integración por partes las siguientes integrales.

$$a)\ \int_1^2 3x^{3/2}\ln x dx; \quad b)\ \int_0^3 x\ln(x+1)\,dx; \quad c)\ \int_0^1 3xe^{-2x}dx; \quad d)\ \int x^5 e^{x^2}dx$$

6. El flujo de beneficios, en millones de euros al año, de una empresa fue en cada instante t el dado por la función

$$b(t) = \begin{cases} \frac{30t}{\sqrt{t+1}}, & 0 < t \leq 8 \\ 80e^{4-t/2}, & t > 8 \end{cases}$$

   Se pide
   a) Calcule el beneficio acumulado hasta el segundo año. Indicación: use el cambio de variable $u = \sqrt{t+1}$.
   b) Calcule la función que proporciona los beneficios acumulados hasta el año t.
   c) ¿Es el beneficio acumulado una función continua? ¿Es derivable?

7. ¿Es alguna de las integrales que aparecen a continuación una integral impropia? Calcule el valor de estas integrales utilizando el cambio de variable que se indica.

$$a)\ \int_0^1 5(\ln x)^4 dx. \text{ (Use el cambio de variable } \ln x = -t).$$
$$b)\ \int_0^2 (4-x^2)^{3/2}dx. \text{ (Use el cambio de variable } x^2/4 = t).$$

   Indicaciones:
   (i) La integral $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \Gamma(p)$ es convergente si $p > 0$ y divergente en caso contrario. Se sabe que $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
   (ii) La integral $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(p,q)$ es convergente si $p > 0$ y $q > 0$ y divergente en caso contrario. Se sabe que $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

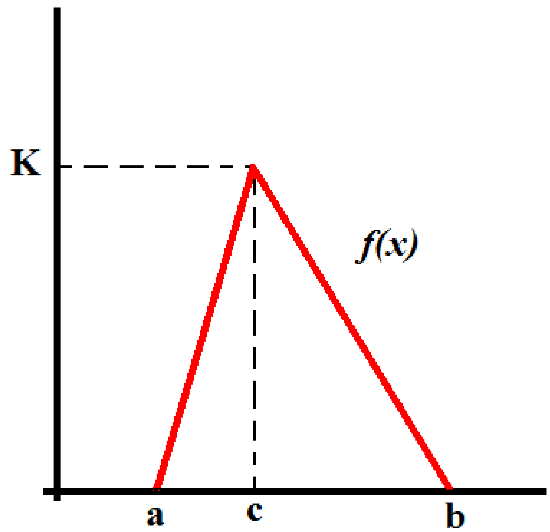
8. Explique por qué son impropias las siguientes integrales. Diga de qué tipo son y si convergen o divergen.

$$a)\ \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx; \quad b)\ \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad c)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad d)\ \int_0^\infty e^{-2x}dx$$

9. Calcule el valor de las siguientes integrales, supuesto que sean convergentes.

$$a)\ \int_{-\infty}^\infty 2e^{1-|x|}dx; \quad b)\ \int_{-\infty}^\infty |x|\,e^{-x^2}dx; \quad c)\ \int_{-1}^0 x\,(1+x)^{-6}\,dx;$$

10. La distribución triangular es una distribución de probabilidad frecuente en aplicaciones donde se tienen pocos datos. Depende de tres parámetros: el valor menor a que toma la variable de estudio, el valor mayor b y el valor más probable c. La probabilidad de que la variable tome un valor s con $a \leq s \leq b$ es $F(s) = \int_a^s f(x)dx$ donde f es la función cuya gráfica aparece a continuación



y K es el valor para el que se cumple $\int_a^b f(x)dx = 1$.
a) Halla la expresión de $f(x)$ y el valor de K.
Indicación: la gráfica de f se compone de dos tramos rectilíneos, y puesto que a, b, c y K son parámetros $f(x)$ dependerá de ellos.

Para los restantes apartados supón que $a = 1$, $c = 2$, $b = 4$ y por tanto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{3}(x-4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

b) Calcula, suponiendo que exista, el valor de $F'(2)$.
c) Calcula $F(x)$ y la probabilidad de que la variable de estudio tome un valor menor o igual a 3.

11. Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial si su función de densidad es

$$f(s) = \begin{cases} e^{-s} \text{ si } s > 0 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

La probabilidad de que X tome cualquier valor menor o igual que x viene dada por la función integral $F(x) = \int_0^x f(s)ds$.
a) Demuestra, sin hallar F, que F es una función derivable y creciente para $x > 0$.
b) Calcula $F(x)$ y dibuja $f(x)$, $F(x)$ y el recinto $\mathbf{R}$ cuya área es $F(1)$.
c) La media μ y la varianza σ^2 de la variable X son

$$\mu = \int_0^\infty sf(s)ds \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \int_0^\infty (s-\mu)^2 f(s)ds.$$

respectivamente. Calcula μ y σ^2. Indicación: para calcular la varianza desarrolla la expresión $(s-\mu)^2$.

12. Sean las funciones

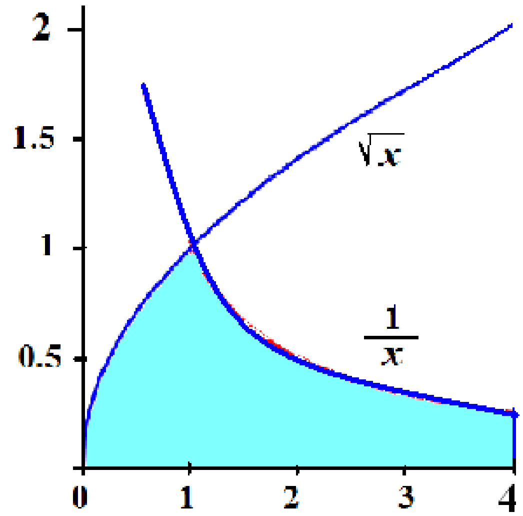
$$\text{(a) } f(x,y) = y(x^3 - 2y); \quad \text{(b) } f(x,y) = ye^{xy}; \quad \text{(c) } f(x,y) = \tfrac{x^2}{1+y} + 1; \quad \text{(d) } f(x,y) = y^{1/2}e^{-x}.$$

Calcule $\iint_R f(x,y)dxdy$, siendo $R = [0,1] \times [0,1]$.

13. Calcule las siguientes integrales dobles

$$\text{(a) } \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(y)dxdy; \quad \text{(b)} \int_0^1\int_0^1 (e^x + y^2)dxdy \quad \text{(c) } \int_1^2\int_4^6 (xy + x)dxdy$$

14. Exprese, utilizando una única integral doble, el área del recinto que aparece debajo.



15. Represente gráficamente la región de integración, calcule su área utilizando integrales dobles y exprese la integral (o integrales) con el orden de integración cambiado en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a) } \int_0^4 \int_{x^2/8}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx; \quad \text{b) } \int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy; \quad \text{c) } \int_{-3}^1 \int_{x^2}^{6-x} f(x,y)dydx;$$

16. En cada uno de los siguientes casos, represente gráficamente la región S y calcule la integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$.
a) $f(x,y) = xe^y$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.
b) $f(x,y) = x^3 y$, siendo S la región limitada por el eje OY y la parábola $x = 3 - 4y^2$.

17. Una función f es la función de densidad de una variable aleatoria bidimensional (X,Y) si $f(x,y) \ge 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y además $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Encuentre, si existiese, el valor que debe tomar la constante a para que las siguientes funciones sean funciones de densidad.
a) $f(x,y) = axy$, para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$; $f(x,y) = 0$, en otro caso.
b) $f(x,y) = ax$, para $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \le 1,\ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0\}$; $f(x,y) = 0$, en otro caso.

18. Se considera la región S del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la hipérbola $xy = \sqrt{3}$. Escriba los límites de integración en la integral doble que aparece a continuación.

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int \quad \left(\int \qquad f(x,y)dy\right) dx.$$

19. Se tienen dos recipientes, el primero tiene por base el rectángulo $[0,3] \times [0,4]$ y la altura viene dada por la función $f(x,y) = 4x$. El segundo tiene por base el triángulo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 6,\ x \ge 0, y \ge 0\}$$

altura c. Halle el valor de la constante c de manera que los dos recipientes tengan el mismo volumen.

20. El techo de una habitación abuhardillada de 4 metros de ancho por 4 de largo tiene una altura, en metros, sobre el suelo que está dada por

$$h(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2, \\ 5 - y, & 0 \le x \le 4,\ 2 \le y \le 4, \end{cases}$$

donde (x,y) es el punto del suelo que dista x metros de una pared e y metros de otra pared perpendicular a la primera. Calcule el volumen de la habitación.